$r(5)$: .50000**0**...

Muodostetaan nyt uusi reaaliluku seuraavasti: Luetaan matriisin diagonaalilla olevat digitit järjestyksessä ja vaihdetaan jokainen digitti joksikin toiseksi. Toisin sanoen luvun desimaalikehitelmässä $.d_1d_2d_3d_4...$ i:s desimaali $d_i \neq M[i][i]$ (i:nnen rivin i:s desimaali). Luvun alku voisi siis olla esimerkiksi .02719.... Tämä luku ei kuitenkaan voi esiintyä matriisissa, sillä se poikkeaa jokaisesta matriisin luvusta: 1. luvusta 1. digitin osalta, 2. luvusta 2. digitin osalta, 3.luvusta 3. digitin osalta jne. Kaikki välin $]0,1[$ reaaliluvut luettelevaa funktiota r ei siis voi olla olemassa!

(Huomaa, ettei auta, vaikka lisäisimmekin näin saamamme reaaliluvun matriisiin, sillä voisimme taas generoida samaan tapaan uuden reaaliluvun, joka ei esiinny listassa.)

Kirjallisuutta

Rucker, Rudy: White Light, or, What is Cantor's Continuum Problem? Ace Books, New York, 1982. (Huima scifi-romaani, jossa leikitellään äärettömyyksillä! Vieraillaan myös Hilbertin hotellissa.)

Rucker, Rudy: Mieli ja äärettömyys. Art House, 1998. (Helppolukuinen tietokirja, joka jatkaa White Light:in teemoista.)

Lem, Stanislaw: N. Ya. Vilenkin, Stories about Sets. Academic Press, New York, 1968. (Novellikokoelma, joka sisältää hauskan novellin Hilbertin hotellista.)

Hofstadter, Douglas R.: Gödel, Esser, Bach: An Eternal Golden Braid. Vintage Books, New York, 1989. (Luku XIII esittää helppotajuisesti Cantorin diagonaaliargumentin avulla, että on olemassa ohjelmallisesti ratkeamattomia ongelmia. Muutenkin sopivaa oheislukemistoa kurssille!)

Solow, Daniel: Hod to read and do proofs. An introduction to mathematical thought process. John Wiley & Sons, New York, 1982. (Havainnollinen kirja todistamisesta.)

2.8 Kertaustehtäviä matematiikasta

1. Ns. Kyyhkyslakkaperiaate (Pigeonhole Principle) sanoo: Jos kyyhkysiä on enemmän kuin pesäkoloja ja jokainen kyyhkynen lentää johonkin pesäkoloon, niin ainakin yhdessä kolossa on enemmän kuin yksi kyyhkynen.

Kuinka käy, jos pesäkoloja on yhtä monta kuin luonnollisia lukuja ja kyyhkysiä yhtä monta kuin kokonaislukuja? Entä jos kyyhkysiä on yhtä monta kuin luonnollisia lukuja, mutta jokainen kyyhkynen yrittää pesiä jokaisen toisen kyyhkysen kanssa eri pesissä? (Yhteen koloon mahtuu vain yksi pesä.)

2. Hilbertin Hotelliin on saapumassa bussiletka, jossa on äärettömän monta bussia, kussakin äärettömän monta matkust ajaa. Miten sijoittaisit vieraat Hilbertin hotellin huoneisiin?

3. Hilbertin hotellin vieraskirjan jokaisella sivulla on vain äärellisen monta nimeä ja uusien vieraiden on kirjoitettava nimensä aina seuraavalle tyhjälle riville. Kuinka monta sivua kirjassa on oltava, jotta uusien vieraiden nimille olisi tilaa (järjestämättä nimiä uudelleen), niin kauan kuin vieraita voitaisiin sijoittaa hotelliin (mahdollisesti järjestämällä uudelleen)?

4. Cantorin planeetalla asiat on tapana mitata äärettömällä tarkkuudella. Jokaisella planeetan asukkaalla on ainutlaatuinen nimi, joka koostuu äärettömän pitkästä aakkoston $\{a, b\}$ merkkijonosta.

   Asukkaat *aaaa.....* ja *baaaa....* ovat päättäneet järjestää seuramatkan Hilbertin Hotelliin ja kutsuneet matkalle mukaan kaikki asukkaat, joiden nimi on aakkosjärjestyksessä heidän välillään. Mukaan ovat kutsutut mm. *aaaa...*:n pikkusisko *abaaaa....* ja *baaaa...*:n serkun poika *abbbbbb......* Mahtuuko porukka Hilbertin Hotelliin? Perustele vastauksesi huolella! (Vihje: Cantorin diagonaaliargumentti.)

5. Etsi virhe seuraavasta todistuksesta, jonka mukaan 2=1. Tarkastellaan yhtälöä $a = b$. Kerro molemmat puolet a:lla, jolloin saat $a^2 = ab$. Vähennä b^2 molemmilta puolilta, jolloin saat $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Jaa kumpikin puoli tekijöihin, $(a - b)(a + b) = b(a - b)$, ja jaa $(a - b)$:llä, jolloin saat $a + b = b$. Lopuksi oletetaan, että a ja b ovat 1, jolloin pätee $2 = 1$.

6. Olkoon X joukko ja X:n koko $n = |X|$. Todista induktiolla, että X:n potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

7. Mitä vikaa on seuraavassa induktiotodistuksessa, jonka mukaan kaikki kissat ovat samanvärisiä?

   Olkoon n kissojen lukumäärä. Jos $n = 1$, niin väite selvästi tosi (yksi kissa on aina samanvärinen, olipa väri mikä tahansa). Oletetaan nyt, että mille tahansa n:n kissan joukolle pätee, että kaikki kissat ovat samanvärisiä. Tarkastellaan sitten $n + 1$:n kissan joukkoa. Valitsemalla näistä mitkä tahansa n kissaa (jotka voidaan valita $n + 1$ eri tavalla) saadaan induktio-oletuksen perusteella samanväristen kissojen joukko. Siispä kaikki $n + 1$ kissaa ovat samanvärisiä.

8. Todista seuraava väite: Jos juhlissa on $n (n \geq 2)$ henkilöä, niin vähintään kahdella henkilöllä on yhtä monta ystävää juhlissa.

9. Todista kontrapositiolla: Jos c on pariton kokonaisluku, niin yhtälöllä $n^2+n-c=0$ ei ole paritonta kokonaislukuratkaisua n:lle.

3.5 Tehtäviä laskennallisista ongelmista

1. Muodosta päätösongelma, jolla voidaan arvioida seuraavan laskennallisen ongelman vaikeutta!

   (a) Laske n:n kertoma $n!$, kun n on luonnollinen luku.

   (b) Järjestä annettu sanaluettelo aakkosjärjestykseen.

   (c) Etsi annetusta verkosta kaikki klikit eli solmujoukot, joiden solmut liittyvät kaarilla kaikkiin muihin klikin solmuihin.

   Mieti myös, miten päätösongelman syöte koodataan merkkijonona. Millainen on päätösongelmaa vastaava formaali kieli?

2. Keksi esimerkkejä ei-laskennallisista ongelmista! Voisiko tietokonetta käyttää silti apuna niiden ratkaisemisessa?

3. Lue satu päätösongelmista `http://www.cs.joensuu.fi/pages/whamalai/tepe04/satu.htm` ja täydennä se loppuun!

4. Tarkastellaan taas Kissastanian logiikkakoulua. Tällä kertaa tunnin aiheena on hieman monimutkaisempi MIAU-järjestelmä, joka koostuu seuraavista säännöistä:

   xUAx → xAUy
   xUUx → xIUy
   x → MxM
   x → xUI
   xx → x
   xI → xUA,

   missä x ja y voivat olla mitätahansa merkkijonoja.

   Tehtävänä on osoittaa, että tyhjästäkin (merkkijonosta) voi syntyä kunnon naukaisu (MIAU) järjestelmän säännöillä!

5. Tarkastellaan aakkostoa $\Sigma = \{m, i, u\}$. Määritellään aakkoston ”potenssit” seuraavasti:

   $\Sigma^0 = \{\epsilon\}$ (tyhjä merkkijono)
   $\Sigma^{k+1} = \Sigma \times \Sigma^k = \{ax | a \in \Sigma$ ja $x \in \Sigma^k\}$.

   Esim. $\Sigma^1 = \{m, i, u\}$, $\Sigma^2 = \{mm, mi, mu, im, ii, iu, um, ui, uu\}$. Montako alkiota (”sanaa”) on Σ^n:ssä? Entä montako sanaa on koko kielessä $\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty}$?