

### 3. Osoita ratkeamattomaksi

- Osoita, että ongelma koskee jotain epätriviaalia semanttista Turingin koneen ominaisuutta (Rice)
  - voi olla osittain ratkeava
  - jos komplementti on osittain ratkeava, täytyy olla täysin ratkeamaton (jos siis oli epätriv. semanttinen ominaisuus) TAI
- Palauta jokin tunnettu täysin ratkeamaton ongelma (ei-rekursiivisesti lueteltava kieli, kuten diagonaalikieli  $D$ ) tuntemattomaan ongelmaan (kieleen). TAI
- Osoita, että ongelman ratkeavuudesta (ratkaisevan Turingin koneen olemassaolosta) seuraisi ristiriita.

Meditoitavaa:

**Ongelman ratkeamattomuus on laskennallisesti ratkeamaton ongelma!**

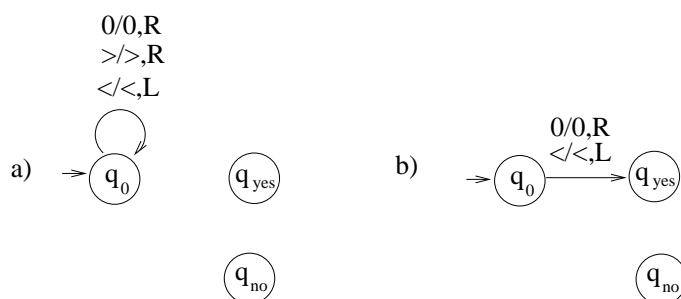
## 7.10 Harjoituksia ratkeamattomuudesta

1. Universaali Turingin kone on kutsunut kaikki maailmankaikkeuden Turingin koneet Universumin laajuisen Turing-symposiumiin, joka pidetään Hilbertin hotellissa. Turingin koneiden huonevaraukset on tehty koneiden koodeilla  $c_M$ . Riittääkö jokaiselle koneelle oma huone, jos hotellissa ei ole muita vieraita? Miten jaat huoneet?
2. Piirrä seuraavan koodin kuvaama Turingin kone!
 

```
111010100101001101001010010011010000100001000010110010101010011
0010010010010011001000010001000010111.
```
3. Mitkä ovat seuraavien Turingin koneiden koodit?
  - (a)  $\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$
  - $\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R)$
  - $\delta(q_0, <) = (q_{yes}, <, L)$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & \delta(q_0, 0) = (q_1, 0, R) \\
 & \delta(q_0, 1) = (q_{no}, 1, R) \\
 & \delta(q_0, <) = (q_{no}, <, L) \\
 & \delta(q_1, 0) = (q_{yes}, 0, R) \\
 & \delta(q_1, 1) = (q_0, 1, R) \\
 & \delta(q_1, <) = (q_{yes}, <, L)
 \end{aligned}$$

4. Muodosta seuraavien Turingin koneiden koodit. Piirrä koodeja vastaavat koneet kooditaulun mukaan (ts.  $q_n = q_{no}$ ). Tunnistavatko koneet samat kielet kuin alkuperäiset koneet?



5. Laadi ohjelma, joka saa syötteenään Turingin koneen siirtymäfunktion ja tulostaa sen koodin. Voit antaa siirtymäfunktion tekstitiedostossa seuraavassa muodossa: 1. rivillä tilojen lukumäärä  $n$  (jolloin  $q_{no} = q_n$ ) ja seuraavilla riveillä siirtymät  $\delta(q, a) = (q', b, \Delta)$  kirjoitettuna  $qaq'b\Delta$ .
6. Simuloi universaalikoneen toimintaa, kun se saa syötteenään  $c_M w$  edellisen tehtävän b-kohdan koneen ja merkkijonon 0101!
7. Laadi äärellinen automaatti joka tunnistaa lailliset Turingin koneiden koodit. Mikä on vastaava säännöllinen lauseke?
8. Laadi standardimallinen Turingin kone, joka tunnistaa lailliset Turingin koneiden koodit.
9. Olkoon kielet  $A$  ja  $B$  rekursiivisesti lueteltavia. (Ts. on olemassa Turingin koneet  $M_A$  ja  $M_B$ , jotka tunnistavat kyseiset kielet ja pysähtyvät ”Kyllä”-tapauksissa, mutta eivät välttämättä ”Ei”-tapauksissa.) Osoita, että kielet  $A \cup B$  ja  $A \cap B$  ovat myös rekursiivisesti lueteltavia ts. voit muodostaa niille Turingin koneet, jotka pysähtyvät ainakin ”Kyllä”-tapauksissa kaikilla syötteillä!

10. Olkoon  $A$  rekursiivisesti numeroituva kieli. Voitko muodostaa sen komplementtikielelle  $\bar{A}$  tunnistuskoneen koneesta  $M_A$  vaihtamalla hyväksyvän ja hylkäävän lopputilan keskenään?
11. Osoita, että kieli  $\{c_M \mid M \text{ pysähtyy syötteellä } \epsilon\}$  on rekursiivisesti numeroituva, mutta ei rekursiivinen! Ts. keksi sille tunnistuskone, joka pysähtyy ”Kyllä”-tapauksissa, mutta ei välttämättä pysähdy ”Ei”-tapauksissa.
12. Anna esimerkki Turingin koneesta, joka
  - a) hyväksyy oman koodinsa.
  - b) ei hyväksy omaa koodiaan.
13. Ovatko seuraavat Turingin koneiden ominaisuudet syntaktisia vai semanttisia? Jos ominaisuus on syntaktinen, niin miten sen voi ratkaista?
  - a)  $M$ :n alkutilasta  $a$ :lla ainakin yksi siirtymä, joka ei johda virhetilaan.
  - b) Jos  $M$  käynnistetään syötteellä  $a$ , se siirtyy hylkäävään tilaan.
  - c)  $M$  laskenta kestää kaikilla syötteillä korkeintaan 10 askelta.
  - d)  $M$ :ssä on korkeintaan 10 siirtymää.
  - e)  $M$ :n alkutilasta pääsee lopputilaan kirjoittamatta mitään.
14. Osoita, että seuraavat rekursiivisesti numeroituvien kielten semanttiset ominaisuudet eivät ole triviaaleja.
  - a)  $L$  sisältää merkkijonon  $w$ .
  - b)  $L$  on äärellinen.
  - c)  $L$  on säännöllinen.
  - d)  $L$  on  $\{0, 1\}^*$ .
15. Keksi kaksi esimerkkiä triviaaleista ominaisuuksista: yksi, joka ei päde millekään rekursiivisesti numeroituvalle kielelle ja toinen, joka pätee kaikille!
16. Mitkä seuraavista Turingin koneiden ominaisuuksista ovat ratkeavia? (Vihje: keksi ratkaisualgoritmin idea tai pohdi, onko ominaisuus semanttinen.)
  - a)  $M$  pysähtyy kaikilla parillisilla binääriluvuilla.
  - b) Kun  $M$  käynnistetään tyhjällä syötteellä, se saavuttaa tilan  $q$  korkeintaan 10 askeleella, tai jos se käynnistetään syötteellä  $a$ , se saavuttaa tilan  $p$  korkeintaan 20 askeleella.
  - c)  $M$ :ssä ei ole yhtään siirtymää tilaan  $q$ , jossa samalla kirjoitettaisiin lopeusmerkki  $<$ .
  - d) Tila  $q$  voidaan saavuttaa tilasta  $p$  korkeintaan 3:lla askeleella.
  - e)  $M$ :ssä on alle 100 tilaa ja  $M$  pysähtyy syötteellä 0.

17. Tiedämme, että ongelmien rekursiivisille palautukselle  $\leq_m$  pätee
- i) Jos  $A \leq_m B$  ja  $B$  on rekursiivisesti numeroituva, niin  $A$  on rekursiivisesti numeroituva.
  - i) Jos  $A \leq_m B$  ja  $B$  on rekursiivinen, niin  $A$  on rekursiivinen.
- Onko kieli  $X$  seuraavissa tapauksissa rekursiivinen, rekursiivisesti numeroituva vai täysin ratkeamaton?
- a) Universaalikielelle  $U$  pätee  $U \leq_m X$ .
  - b) Kielelle  $H$  ja tuntemattomalle kielelle  $Y$  pätee  $H \leq_m Y$  ja  $Y \leq_m X$ .  
( $H = \{c_M w \mid M \text{ pysähtyy syötteellä } w\}$ )
  - c)  $H$ :n komplementille  $\overline{H}$  pätee  $\overline{H} \leq_m X$ .
  - d) Hamiltonin kehä -kielelle  $HC = \{x \mid x \text{ koodaa verkon } G, \text{ joka sisältää Hamiltonin kehän}\}$   
<sup>6</sup> pätee  $X \leq_m HC$ .
  - e)  $HC \leq_m X$

Huom! Muistathan kontrapositiosäännön:  $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ .

18. Osoita, että seuraava ongelma on ratkeamaton: Annettu Turingin koneen koodi  $c_M$ , tila  $q$  ja syöte  $w$ . Päätyykö  $M$  syötteellä  $w$  tilaan  $q$ ?
19. Ovatko seuraavat kielet rekursiivisia, rekursiivisesti numeroituvia vai täysin ratkeamattomia?
- a)  $L_1 = \{c_M \mid \text{Koneen } M \text{ koodi } c_M \text{ on palindromi}\}$ .
  - b)  $L_2 = \{c_M \mid c_M \text{ on koneen } M \text{ koodi ja kone } M \text{ tunnistaa kaikki aakkoston } \{0, 1\} \text{ palindromit}\}$ .

(Palindromin määritelmä: Merk.  $w = a_0 a_1 \dots a_n$ , jos  $a_0 a_1 \dots a_n = a_n a_{n-1} \dots a_0$ , niin  $w$  on palindromi.)

20. Ovatko seuraavat ongelmat ratkeavia, osittain ratkeavia vai täysin ratkeamattomia?
- a) Pysähtyykö annettu Turingin kone kaikilla syötteillä?
  - b) Jääkö annettu Turingin kone pysähtymättä kaikilla syötteillä?
  - c) Pysähtyykö annettu Turingin kone vähintään yhdellä syötteellä?
  - d) Jääkö annettu Turingin kone pysähtymättä vähintään yhdellä syötteellä?
21. Seuraavat ongelmat tiedetään ratkeamattomiksi, mutta ovatko ne osittain ratkeavia vai täysin ratkeamattomia?

---

<sup>6</sup>Hamiltonin kehä=sykli, joka kulkee kulkee kaikkien solmujen kautta täsmälleen kerran.

- a) Sisältääkö kieli  $L(M)$  vähintään kaksi merkkijonoa?
  - b) Onko  $L(M)$  äärellinen?
  - c) Onko  $L(M)$  kontekstiton kieli?
22. Keksi konkreettisia esimerkkejä ratkeamattomista ongelmista! (Muitakin kuin pysähtymisongelma.) Huom! Perustele ratkeamattomuus. Onko kyseessä osittain ratkeava (rek. numer. kieli) vai täysin ratkeamaton ongelma?
23. Ovatko seuraavat ongelmat ratkeavia vai ratkeamattomia? Mikäli ne ovat ratkeamattomia, kerro ovatko ne osittain ratkeavia vai täysin ratkeamattomia. Mikäli ne taas ovat ratkeavia, mainitse heikoin konetyyppi (äärellinen automaatti, pinoautomaatti, Turingin kone), joka ratkaisee ongelman.
- a) Etsi mielivaltaisen polynomin  $a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  kokonaisluku-nollakohdat!
  - b) Laadi kääntäjän virhetarkastaja, joka saa syötteenään ohjelman koodin ja tutkii, ettei ohjelma suorita ajonsa aikana 0:lla jakoa.
  - c) Tutki sisältääkö annettu tekstitiedosto joko sanat **kissa** ja **musta** tai sanat **lintu** ja **valkoinen**, mutta ei molempia.
  - d) Tarkista, että annetussa tekstitiedostossa sanaa "eläin" seuraa sana "viisas", vain jos samassa lauseessa esiintyi sana "kissa".
  - e) Laadi yleinen virustestaaja, joka tunnistaa kaikki "vaaralliset" ohjelmat ts. sellaiset, jotka voivat ajonsa aikana muuttaa systeemitiedostoja.