

Harjoitus 1

1. Ns. Kyyhkyslakkaperiaate (Pigeonhole Principle) sanoo: Jos kyyhkysiä on enemmän kuin pesäkoloja ja jokainen kyyhkynen lentää johonkin pesäkoloon, niin ainakin yhdessä kolossa on enemmän kuin yksi kyyhkynen.

Kuinka käy, jos pesäkoloja on yhtä monta kuin luonnollisia lukuja ja kyyhkysiä yhtä monta kuin kokonaislukuja? Entä jos kyyhkysiä on yhtä monta kuin luonnollisia lukuja, mutta jokainen kyyhkynen yrittää pesiä jokaisen toisen kyyhkyn kanssa eri pesissä? (Yhteen koloon mahtuu vain yksi pesä.)

2. Olkoon X joukko ja X :n koko $n = |X|$. Todista induktiolla, että X :n potenssi-joukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

3. Mitä vikaa on seuraavassa induktiotodistuksessa, jonka mukaan kaikki kissat ovat samanvärisiä?

Olkoon n kissojen lukumäärä. Jos $n = 1$, niin väite selvästi tosi (yksi kissa on aina samanvärisen, olipa väri mikä tahansa). Oletetaan nyt, että mille tahansa n :n kissan joukolle pätee, että kaikki kissat ovat samanvärisiä. Tarkastellaan sitten $n + 1$:n kissan joukkoa. Valitsemalla näistä mitkä tahansa n kissaa (jotka voidaan valita $n + 1$ eri tavalla) saadaan induktio-oletuksen perusteella samanväristen kissojen joukko. Siispä kaikki $n + 1$ kissaa ovat samanvärisiä.

4. Todista seuraava väite: Jos juhlassa on $n(n \geq 2)$ henkilöä, niin vähintään kahdella henkilöllä on yhtä monta ystävää juhlassa.

5. Lue satu päätösongelmista

<http://www.cs.joensuu.fi/pages/whamalai/tepe/satu.html> ja täydennä se loppuun!

6. Tarkastellaan taas Kissastanian logiikkakoulua. Tällä kertaa tunnin aiheena on hieman monimutkaisempi MIAU-järjestelmä, joka koostuu seuraavista säännöistä:

$$xUAy \rightarrow xAUx$$

$$xUUy \rightarrow xIUx$$

$$x \rightarrow MxM$$

$$x \rightarrow xUI$$

$$xx \rightarrow x$$

$xI \rightarrow xUA$

Tehtävänä on osoittaa, että tyhjästäkin (merkkijonosta) voi syntyä kunnan naukaisu (MIAU) järjestelmän säännöillä!