

Harjoituksia ratkeamattomuudesta

1. Osoita, että seuraavat rekursiivisesti numeroituvien kielten semanttiset ominaisuudet eivät ole triviaaleja.
 - a) L sisältää merkkijonon w .
 - b) L on äärellinen.
 - c) L on säännöllinen.
 - d) L on $\{0, 1\}^*$.
2. Etsi kaksi esimerkkiä triviaaleista ominaisuuksista: yksi, joka ei päde millekään rekursiivisesti numeroituvalla kielellä ja toinen, joka pätee kaikille!
3. Mitkä seuraavista Turingin koneiden ominaisuuksista ovat ratkeavia? (Vihje: keksi ratkaisualgoritmin idea tai pohdi, onko ominaisuus semanttinen.)
 - a) M pysähtyy kaikilla parillisilla binääriluvuilla.
 - b) Kun M käynnistetään tyhjällä syötteellä, se saavuttaa tilan q korkeintaan 10 askeleella, tai jos se käynnistetään syötteellä a , se saavuttaa tilan p korkeintaan 20 askeleella.
 - c) M :ssä ei ole yhtään siirtymää tilaan q , jossa samalla kirjoitettaisiin lopeusmerkki $<$.
 - d) Tila q voidaan saavuttaa tilasta p korkeintaan 3:lla askeleella.
 - e) M :ssä on alle 100 tilaa ja M pysähtyy syötteellä 0.
4. Tiedämme, että ongelmien rekursiivisille palautukselle \leq_m pätee
 - i) Jos $A \leq_m B$ ja B on rekursiivisesti numeroituva, niin A on rekursiivisesti numeroituva.
 - ii) Jos $A \leq_m B$ ja B on rekursiivinen, niin A on rekursiivinen.Onko kieli X seuraavissa tapauksissa rekursiivinen, rekursiivisesti numeroituva vai täysin ratkeamaton?
 - a) Universaalikielelle U pätee $U \leq_m X$.
 - b) Kielelle H ja tuntemattomalle kielelle Y pätee $H \leq_m Y$ ja $Y \leq_m X$. ($H = \{c_M w \mid M \text{ pysähtyy syötteellä } w\}$)
 - c) H :n komplementille \overline{H} pätee $\overline{H} \leq_m X$.
 - d) Hamiltonin kehä -kielelle $HC = \{x \mid x \text{ koodaa verkon } G, \text{ joka sisältää Hamiltonin kehän}\}^1$ pätee $X \leq_m HC$.

¹Hamiltonin kehä = sykli, joka kulkee kulkee kaikkien solmujen kautta täsmälleen kerran.

e) $HC \leq_m X$

Huom! Muistathan kontrapositiosäännön: $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$.

5. Osoita, että seuraava ongelma on ratkeamaton: Annettu Turingin koneen koodi c_M , tila q ja syöte w . Päätyykö M syötteellä w tilaan q ?
 6. Ovatko seuraavat kielet rekursiivisia, rekursiivisesti numeroituvia vai täysin ratkeamattomia?
 - a) $L_1 = \{c_M \mid \text{Koneen } M \text{ koodi } c_M \text{ on palindromi}\}$.
 - b) $L_2 = \{c_M \mid c_M \text{ on koneen } M \text{ koodi ja kone } M \text{ tunnistaa kaikki aakkoston } \{0, 1\} \text{ palindromit}\}$.
- (Palindromin määritelmä: Merk. $w = a_0a_1\dots a_n$, jos $a_0a_1\dots a_n = a_na_{n-1}\dots a_0$, niin w on palindromi.)
7. Ovatko seuraavat ongelmat ratkeavia, osittain ratkeavia vai täysin ratkeamattomia?
 - a) Pysähtyykö annettu Turingin kone kaikilla syötteillä?
 - b) Jääkö annettu Turingin kone pysähtymättä kaikilla syötteillä?
 - c) Pysähtyykö annettu Turingin kone vähintään yhdellä syötteellä?
 - d) Jääkö annettu Turingin kone pysähtymättä vähintään yhdellä syötteellä?
 8. Seuraavat ongelmat tiedetään ratkeamattomiksi, mutta ovatko ne osittain ratkeavia vai täysin ratkeamattomia?
 - a) Sisältääkö kieli $L(M)$ vähintään kaksi merkkijonoa?
 - b) Onko $L(M)$ äärellinen?
 - c) Onko $L(M)$ kontekstiton kieli?
 9. Keksi konkreettisia esimerkkejä ratkeamattomista ongelmista! (Muitakin kuin pysähtymisongelma.) Huom! Perustele ratkeamattomuus. Onko kyseessä osittain ratkeava (rek. numer. kieli) vai täysin ratkeamaton ongelma?
 10. Ovatko seuraavat ongelmat ratkeavia vai ratkeamattomia? Mikäli ne ovat ratkeamattomia, kerro ovatko ne osittain ratkeavia vai täysin ratkeamattomia. Mikäli ne taas ovat ratkeavia, mainitse heikoin konetyyppi (äärellinen automaatti, pinoautomaatti, Turingin kone), joka ratkaisee ongelman.

- a) Etsi mielivaltaisen polynomin $a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ kokonaislukunollakohdat!
 - b) Laadi kääntäjän virhetarkastaja, joka saa syötteenään ohjelman koodin ja tutkii, ettei ohjelma suorita ajonsa aikana 0:lla jakoa.
 - c) Tutki sisältääkö annettu tekstitiedosto joko sanat **kissa** ja **musta** tai sanat **lintu** ja **valkoinen**, mutta ei molempia.
 - d) Tarkista, että annetussa tekstitiedostossa sanaa ”eläin” seuraa sana ”viisas”, vain jos samassa lauseessa esiintyi sana ”kissa”.
 - e) Laadi yleinen virustestaaja, joka tunnistaa kaikki ”vaaralliset” ohjelmat ts. sellaiset, jotka voivat ajonsa aikana muuttaa systeemitiedostoja.
11. Vastaa kurssikyselyyn! Kurssikysely löytyy osoitteesta <http://cs.joensuu.fi/> arvio/. Mainitsethan, osallistuitko ongelmalähtöiseen oppimiseen, ja millaisena sen koit! Kerro myös, jos et osallistunut ongelmalähtöiseen oppimiseen, miksi se ei sopinut sinulle. Kiitos palautteestasi!