Näin näytät pitkää nenää pumppauslemmalle

(heuristisia ohjeita)

1. Mieti annettua kieltä: mikä ehto täytyy rikkoa, jotta merkkijono ei kuulu kieleen?

   - ⋆ ehto voi koskea esim. tiettyjen merkkien lukumäärien keskinäistä suhdetta $(a^k b^m c^m,\ a^m b^{2m})$
   - ⋆ tai liittyä alkulukuihin, joiden jono on epäsäännöllinen $(a^p,\ p\ joku\ alkuluku)$
   - ⋆ tai sanan osia: esim. sanan alku- ja loppuosa riippuvat jotenkin toisistaan $(ww^{\mathcal{R}},\ ww)$

2. Mieti, mikä olisi yksinkertaisin merkkijono, jossa esiintyvät eheysehdon osapuolet. Joskus kielessä on todistuksen kannalta täysin turhia (säännöllisiä) osia, esim. $a^k b^m c^m$:ssä a:n lukumäärällä ei ole mitään väliä – voidaan valita merkkijono $b^m c^m$.

   - ⋆ jos ehdon osapuolten välissä on tuollainen säännöllinen osa, se saattaa olla tarpeen osapuolien erottamiseen toisistaan, esim. $a^m b^k a^m$:ssä tarvitaan ainakin yksi b erottamaan alku- ja loppu-a:t. Valitaan esim. $a^m b a^m$.
   - ⋆ jos kielen alku- ja loppuosa riippuvat jotenkin toisistaan, mutta muuten ne saavat olla mitä tahansa, riittää erottaa alku- ja loppuosa toisistaan, esim. kielen ww $(w \in \{a, b\}^*)$ kohdalla voidaan valita $a^m b a^m b$ tai $b a^m b a^m$.

3. Valitse nyt se mystinen n siten, että eheysehdon toinen osapuoli kuuluu ensimmäiseen n:ään merkkiin ja sitä päästään pumppaamaan. Toinen tavoite on, että merkkijonon mahdollisia jakoja osiin uvw olisi mahdollisimman vähän (tämä ei ole kuitenkaan yhtä kriittistä, säästää vain työtä).

   - ⋆ esim. $x = a^m b^m$. Kannattaa valita $n = m$, jolloin osat uv kuuluvat a^m:ään (voivat silti vaihdella: pelkkää b:tä tai ensin a:ta ja sitten b:tä). Tällöin pääsemme pumppaamaan a:ta ja eheysehto rikkoontuu.

     Huom! Voimme valita myös $n = 2m$, jolloin tulee lisää töitä: Pumpattava osa voi koostua vain a:sta, vain b:stä tai molemmista (muotoa $a^i b^j$). Viimeisessä tapauksessa pumppaus uv^2w sotkee asiat ($a^i b^j a^i b^i$ ei kuulu kieleen).

4. Testaa nyt **kaikki** Pumppauslemman mukaiset jaot $x = uvw$, $|uv| \leq n$ ja $v \neq \epsilon$. Jokaisella jaolla kokeile pumppausta i:n arvoilla 0,2,3,... kunnes löytyy sellainen i, että $uv^iw \notin A$.

   $\star$ tavallisesti arvo $i = 0$ tai viimeistään $i = 2$ tuottaa halutun tuloksen.

5. Jos onnistuit rikkomaan eheysehdon kaikilla jaoilla uvw, voit huudahtaa voitonriemuisena: Heureka!
   Onneksi olkoon!

Miksi pumppauslemmaa käytetään näin?

Esitetään PL loogisena lauseena:

$$R(A) \quad \Rightarrow \quad \exists n \, \forall x \; P(x) \, \exists \; uvw \; Q(x, u, v, w) \, \forall i \; S(x).$$

Kontrapositio:

$$A \Rightarrow B \quad \equiv \quad \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Toisaalta tiedämme:

$$\begin{aligned} \neg \exists x P(x) \quad &= \quad \forall x \neg P(x) \\ \neg \forall x P(x) \quad &= \quad \exists x \neg P(x). \end{aligned}$$

Käännetään Pumppauslemma näiden avulla ja se on yhä tosi:

$$\begin{array}{lll} & \neg(\exists n \, \forall x \; P(x) \; \exists uvw \; Q(x,u,v,w) \; \forall i \; S(x,i)) & \Rightarrow \quad \neg R(A). \\ \equiv & \forall n \; \neg(\forall x \; P(x) \; \exists uvw \; Q(x,u,v,w) \; \forall i \; S(x,i)) & \Rightarrow \quad \neg R(A) \\ \equiv & \forall n \; \exists x \; P(x) \; \neg(\exists uvw \; Q(x,u,v,w)) \; \forall i \; S(x,i)) & \Rightarrow \quad \neg R(A) \\ \equiv & \forall n \; \exists x \; P(x) \; \forall uvw \; Q(x,u,v,w) \; \neg(\forall i S(x,i)) & \Rightarrow \quad \neg R(A) \\ \equiv & \forall n \; \exists x \; P(x) \; \forall uvw \; Q(x,u,v,w) \; \exists i \; \neg(S(x,i)) & \Rightarrow \quad \neg R(A). \end{array}$$

Siis: Jos kaikilla n on joku x $|x| \geq n$ kaikilla uvw $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ on olemassa $i \geq 1$ siten että $uv^iw \notin A$, niin A ei ole säännöllinen.