Luku 5

Turingin koneet ja rajoittamattomat kielet

Tässä luvussa tutustumme kaikkein tärkeimpään konetyyppiin, Turingin koneisiin, joilla voidaan *Churchin-Turingin teesin* mukaan ratkaista mikä tahansa mekaanisesti ratkeava ongelma. Toisin sanoen Turingin koneet tunnistavat Chomskyn kielihierarkian vahvimman kielityypin, *rajoittamattomat kielet* (tyyppi 0). Turingin koneiden avulla voidaan siis tutkia, onko ongelma ylipäänsä ratkeava (keksitäänkö sen ratkaiseva Turingin kone) sekä analysoida ongelman vaativuutta (kuinka monta aika-askelta tai työnauhan solua kone tarvitsee työssään).

Rajoittamattomien kielten luokka voidaan jakaa kahteen luokkaan sen perusteella, pysähtyykö ongelman ratkaiseva Turingin kone kaikilla syötteillä (siis sekä hyväksyessään että hylätessään merkkijonon se lopulta pysähtyy ja palauttaa vastauksen "kyllä" tai "ei") vai pysähtyykö se vain hyväksyvässä tapauksessa (vastaus "kyllä"). Ensimmäistä, aina pysähtyvien eli *totaalisten Turningin koneiden* tunnistamaa kieliluokkaa kustutaan *Rekursiivisiksi kieliksi* ja sitä vastaavat päätösongelmat ovat *ratkeavia* (*solvable, decidable*). Toista, vain myönteisissä tapauksissa pysähtyviä koneita vastaavaa kieliluokkaa kutsutaan *Rekursiivisesti numeroituviksi* kieliksi ja vastaavat päätösongelmat ovat *osittain ratkeavia* (*semidecidable*). Kieliluokkien ulkopuolelle jäävät täysin ratkeamattomat ongelmat. Huom! Myös osoittain ratkeavat ongelmat luetaan ratkeamattomiin ongelmiin (*unsolvable, undecidable*). [3]

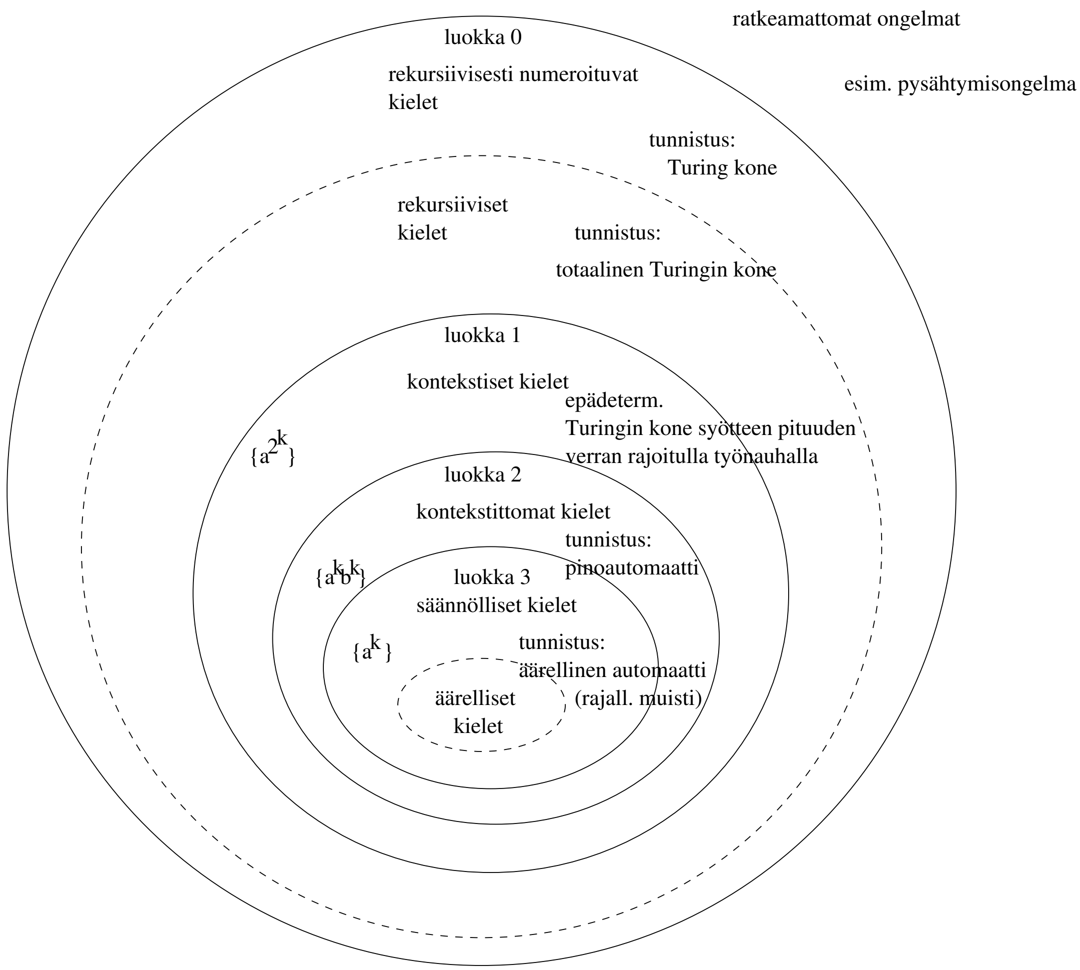
On syytä huomata, että olemme hypänneet kokonaan yhden Chomskyn luokan, nimittäin *kontekstillisten kielten* (luokka 1) yli. Tietojenkäsittelytieteen kannalta kontekstillisten kielten luokkaa ei ole pidetty merkittävänä, sillä kaikki kontekstilliset kielet voidaan tunnistaa Turingin koneiden avulla ja toisaalta törmäämme käytännössä harvoin ongelmiin, jotka olisivat (ts. vastaavat formaalit kielet olisivat) kontekstillisia, mutta eivät rajoittamattomia. Chomsky kuitenkin uskoi luonnollisten kielten kuuluvan juuri tähän luokkaan.

5.1 Churchin-Turingin teesi

Churchin-Turingin teesi: Mikä tahansa mekaanisesti ratkeava ongelma voidaan ratkaista Turingin koneella.

- kaikki algoritmisesti ratkeavat ongelmat
- Esimerkiksi ohjelmointikielet ja RAM-koneet laskentavoimaltaan ekvivalentteja Turingin koneiden kanssa
  - Kaikki "riittävän vahvat" ohjelmointikielet määrittävät täsmälleen saman ratkeavien ongelmien luokan
  - Perustelu: millä tahansa riittävän vahvalla ohjelmointikielellä voidaan kirjoittaa kääntäjä (oik. tulkkiohjelma) mille tahansa toiselle ohjelmointikielelle

[3] Huom! Nimityksillä *rekursiivinen* ja *rekursiivisesti numeroituva* ei ole mitään tekemistä tietojenkäsittelytieteilijän ymmärtämän rekursion kanssa. Termien hämäävä alkuperä johtuu matemaatikkojen (Gödel, Kleene) määrittelemistä rekursiivisista ja rekursiivisesti numeroituvista funktioista, joista lisää ekskursiossa.



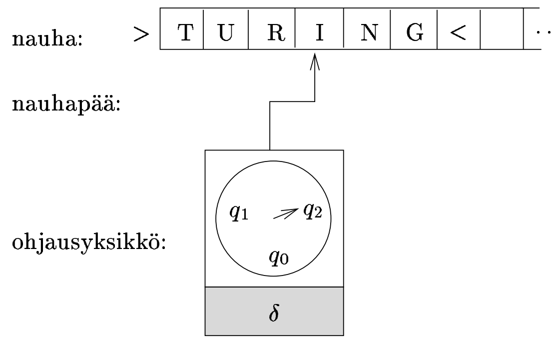
Kuva 5.1: Chomskyn kielihierarkia täydennettynä rekursiivisten kielten luokalla.

  - Mikä tahansa Turingin kone voidaan toteuttaa tällaisen ohjelmointikielen ohjelmana ja kääntäen (sama pätee RAM-koneelle) (ks. Hopcroft-Motwani-Ullman, luvut 8.6.1 ja 8.6.2)

- Huom! Myös kaksipinoiset pinoautomaatit yhtä vahvoja kuin Turingin koneet! (ks. Hopcroft-Motwani-Ullman: teoreema 8.13)

- Chomskyn kielihierarkiassa rekursiivisesti lueteltavat kielet: jos Turingin kone ratkaisee osittain, niin mikään muukaan malli ei kykene ratkaisemaan kuin osittain (ts. joillain syötteillä laskenta jatkuu ikuisesti...).

- Yleensä algoritmiksi kutsutaan vain sellaista algoritmia, jonka laskenta päät-



Kuva 5.2: Turingin kone.

tyy aina, kaikilla syötteillä – ts. rekursiiviset eli ratkeavat kielet. Ei ole järkeä tehdä ohjelmaa, joka ei koskaan pysähdy!

- Huom! Vain teesi, ei teoreema (lause): kukaan ei ole voinut todistaa oikeaksi, mutta kaikki tunnetut laskentamallit ovat osoittautuneet ekvivalenteiksi ja yleisesti uskotaan pätevän kaikille laskennan malleille.

- Jotkut ovat spekuloineet, olisivatko ns. kvanttitietokoneet vahvempia...

5.2 Turingin koneet

- kuten äärellinen automaatti, jolla toiseen suuntaan ääretön työnauha, jota voi lukea ja kirjoittaa merkki kerrallaan

- Aluksi nauhalla on syötemerkkijono (ja loppu nauhasta tyhjä), nauhapää osoittaa ensimmäistä nauhapään paikkaa ja kone käynnistetään alkutilassa q_0

- Kullakin laskenta-askeleella se lukee nauhapään kohdalla olevan merkin, päättää siirtymäfunktion mukaisesti uuden tilansa, kirjoittaa nauhapään kohdalla uuden merkin ja siirtää nauhapäätä yhden askeleen vasemmalle tai oikealle (ensimmäisen paikan vasemmalle puolelle ei voi kuitenkaan mennä)

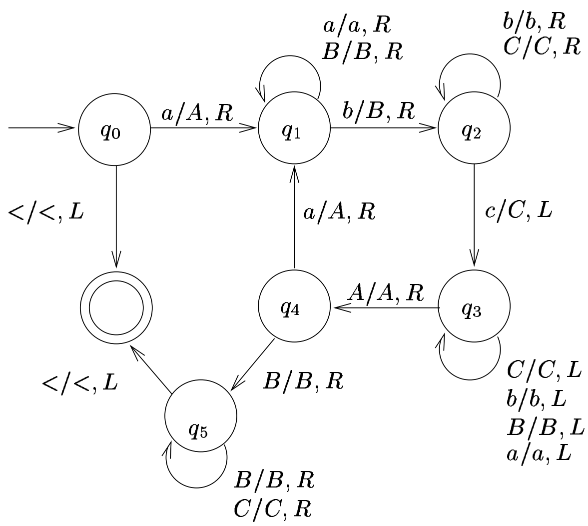
- Koneella on hyväksyvä lopputila q_{yes} ja hylkäävä lopputila q_{no} (kun kyseessä on kielen tunnistaminen, jota käsittelemme). Kone pysähtyy, kun se saavuttaa lopputilan.

- Turingin kone eroaa äärellisestä automaatista siten että
  - työnauhalle voidaan kirjoittaa

  - työnauhalla voi liikkua sekä vasemmalle että oikealle
  - työnauha on rajoittamattoman pitkä
  - kun lopputila on saavutettu, kone pysähtyy

Esim. kielen $\{a^k b^k c^k | k \geq 0\}$ tunnistava Turingin kone

- Idea: kone pitää kirjaa tapaamistaan a:sta, b:stä ja c:stä muuttamalla ne yksi kerrallaan A:ksi, B:ksi ja C:ksi.
- muutettuaan viimeisen a:n A:ksi tarkistaa, ettei enää jäljellä b:tä tai c:tä.



Kuva 5.3: Kielen $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ tunnistava Turingin kone.

Huom! Sama voidaan ratkaista kaksipinoisella pinoautomaatilla (harjoitustehtävä) tai tietokoneohjelmana:

```
while ((c=getchar())!=EOF) {
    switch(c) {
        case ’a’: A++;
        case ’b’: B++;
        case ’c’: C++;
        else: ERROR;
    }
}
if ((A==B) && (B==C))
    printf(”Ok”);
```

5.2.1 Formaali määrittely

Määritelmä: *Turingin kone* on seitsikko

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}),$$

missä

- Q on koneen *tilojen* äärellinen joukko;
- Σ on koneen *syöteaakkosto*;
- $\Gamma \supseteq \Sigma$ on koneen *nauha-aakkosto*; ol. että $>, < \notin \Gamma$;
- $\delta : (Q - \{q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}\}) \times (\Gamma \cup \{>, <\}) \to Q \times (\Gamma \cup \{>, <\}) \times \{L, R\}$ on koneen *siirtymäfunktio*;
- $q_0 \in Q$ on koneen *alkutila*;
- $q_{\text{yes}} \in Q$ on koneen *hyväksyvä* ja $q_{\text{no}} \in Q$ sen *hylkäävä lopputila*.

Siirtymäfunktion arvoilta

$$\delta(q, a) = (q', b, \Delta)$$

vaaditaan:

(i) jos $b = >$, niin $a = >$;

(ii) jos $a = >$, niin $b = >$ ja $\Delta = R$;

(iii) jos $b = <$, niin $a = <$ ja $\Delta = L$.

- Siirtymäfunktion arvon $\delta(q, a) = (q', b, \Delta)$ tulkinta:
  - Ollessaan tilassa q ja lukiessaan nauhamerkin (tai alku- tai loppumerkin) a, kone siirtyy tilaan q', kirjoittaa lukemaansa paikkaan merkin b, ja siirtää nauhapäätä yhden merkkipaikan verran suuntaan Δ ($L \sim$ "left", $R \sim$ "right").
  - Sallittuja kirjoitettavia merkkejä ja siirtosuuntia on rajoitettu, mikäli a = '$>$' tai '$<$', ja siirtymäfunktion arvo on aina määrittelemätön, kun $q = q_{\text{yes}}$ tai $q = q_{\text{no}}$. Joutuessaan jompaan kumpaan näistä tiloista kone pysähtyy heti.

- Koneen *tilanne* on nelikko

  $$(q, u, a, v) \in Q \times \Gamma^* \times (\Gamma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma^*,$$

  missä voi olla $a = \epsilon$, mikäli myös $u = \epsilon$ tai $v = \epsilon$.

- Tulkinta: kone on tilassa q, nauhan sisältö sen alusta nauhapään vasemmalle puolelle on u, nauhapään kohdalla on merkki a ja nauhan sisältö nauhapään oikealta puolelta käytetyn osan loppuun on v.

- Mahdollisesti on $a = \epsilon$, jos nauhapää sijaitsee aivan nauhan alussa tai sen käytetyn osan lopussa. Ensimmäisessä tapauksessa ajatellaan, että kone "havaitsee" merkin '$>$' ja toisessa tapauksessa merkin '$<$'.

- *Alkutilanne syötteellä* $x = a_1 a_2 \ldots a_n$ on nelikko

  $$(q_0, \epsilon, a_1, a_2 \ldots a_n).$$

- Tilannetta (q, u, a, v) merkitään yleensä yksinkertaisemmin $(q, u\underline{a}v)$, ja alkutilannetta syötteellä x yksinkertaisesti $(q_0, \underline{x})$.

- Tilanne (q, w) *johtaa suoraan* tilanteeseen (q', w'), merkitään

  $$(q, w) \underset{M}{\vdash} (q', w'),$$

  jos jokin seuraavista ehdoista täyttyy: kaikilla $q, q' \in Q$, $u, v \in \Gamma^*$, $a, b \in \Gamma$ ja $c \in \Gamma \cup \{\epsilon\}$:

  jos $\delta(q, a) = (q', b, R)$, niin $(q, u\underline{a}cv) \underset{M}{\vdash} (q', ub\underline{c}v)$;

  jos $\delta(q, a) = (q', b, L)$, niin $(q, uc\underline{a}v) \underset{M}{\vdash} (q', u\underline{c}bv)$;

  jos $\delta(q, >) = (q', >, R)$, niin $(q, \underline{\epsilon}cv) \underset{M}{\vdash} (q', \underline{c}v)$;

  jos $\delta(q, <) = (q', b, R)$, niin $(q, u\underline{\epsilon}) \underset{M}{\vdash} (q', ub\underline{\epsilon})$;

  jos $\delta(q, <) = (q', b, L)$, niin $(q, uc\underline{\epsilon}) \underset{M}{\vdash} (q', u\underline{c}b)$;

  jos $\delta(q, <) = (q', <, L)$, niin $(q, uc\underline{\epsilon}) \underset{M}{\vdash} (q', u\underline{c})$.

- Tilanteet, jotka ovat muotoa (q_{yes}, w) tai (q_{no}, w) eivät johda mihinkään muuhun tilanteeseen. Näissä tilanteissa kone *pysähtyy*.

- Tilanne (q, w) *johtaa tilanteeseen* (q', w'), merkitään

  $$(q, w) \underset{M}{\vdash}^{*} (q', w'),$$

  jos on olemassa tilannejono (q_0, w_0), (q_1, w_1), $\ldots$, (q_n, w_n), $n \geq 0$, siten että

  $$(q, w) = (q_0, w_0) \underset{M}{\vdash} (q_1, w_1) \underset{M}{\vdash} \cdots \underset{M}{\vdash} (q_n, w_n) = (q', w').$$

- Turingin kone M *hyväksyy* merkkijonon $x \in \Sigma^*$, jos

  $$(q_0, \underline{x}) \underset{M}{\vdash}^{*} (q_{\text{yes}}, w) \qquad \text{jollakin } w \in \Gamma^*;$$

  muuten M *hylkää* x:n.

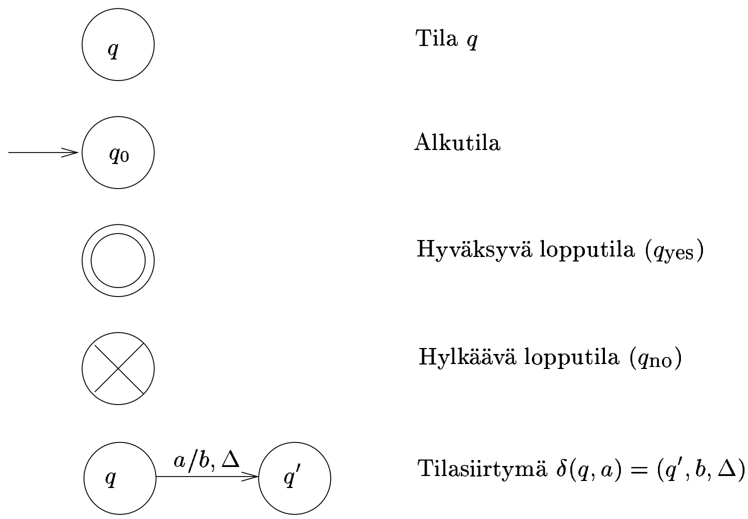
  (ts. hyväksymiseen riittää, että pääsemme hyväksyvään lopputilaan, koko merkkijonoa ei välttämättä tarvitse edes lukea! Nauhalle saa luonnollisestikin jäädä merkkejä $\leftrightarrow$ automaatit)

- Koneen M *tunnistama kieli* on:

  $$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, \underline{x}) \underset{M}{\vdash}^{*} (q_{\text{yes}}, w) \text{ jollakin } w \in \Gamma^*\}.$$

5.2.2 Turingin koneen esitys siirtymäkaaviona

Turingin kone voidaa esittää antamalla sen siirtymäfunktio tai siirtymäkaaviona samaan tapaan kuin äärelliset automaatit.



Kuva 5.4: Turingin koneiden kaavioesityksen merkinnät.

Esimerkki: kieli $\{a^{2k} \mid k \geq 0\}$ voidaan tunnistaa Turingin koneella

$$M = (\{q_0, q_1, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}\}, \{a\}, \{a\}, \delta, q_0, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}),$$

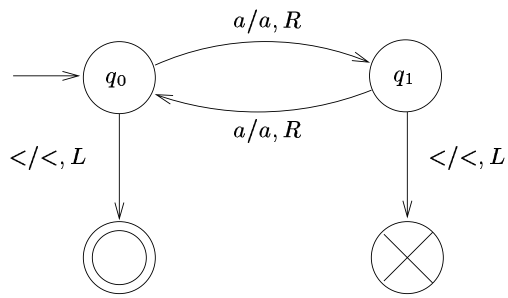
missä

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a) &= (q_1, a, R), \\
\delta(q_1, a) &= (q_0, a, R), \\
\delta(q_0, <) &= (q_{\text{yes}}, <, L), \\
\delta(q_1, <) &= (q_{\text{no}}, <, L).
\end{aligned}$$

Koneen M laskenta esimerkiksi syötteellä aaa etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned}
(q_0, \underline{a}aa) &\underset{M}{\vdash} (q_1, a\underline{a}a) \underset{M}{\vdash} (q_0, aa\underline{a}) \\
&\underset{M}{\vdash} (q_1, aaa\underline{\epsilon}) \underset{M}{\vdash} (q_{\text{no}}, aa\underline{a}).
\end{aligned}$$

Kone pysähtyy tilassa q_{no}, joten $aaa \notin L(M)$.



Kuva 5.5: Kielen $\{a^{2k} \mid k \geq 0\}$ tunnistava Turingin kone.

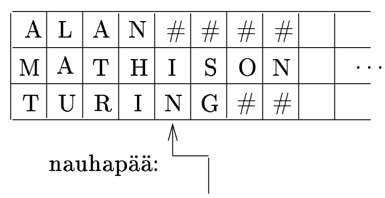
Esimerkki 2: Kielen $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ tunnistavan koneen laskenta syötteellä $aabbcc$:

$$
\begin{array}{llll}
(q_0, \underline{a}abbcc) & \vdash & (q_2, AABB\underline{C}c) & \vdash \\
(q_1, A\underline{a}bbcc) & \vdash & (q_2, AABBC\underline{c}) & \vdash \\
(q_1, Aa\underline{b}bcc) & \vdash & (q_3, AABB\underline{C}C) & \vdash \\
(q_2, AaB\underline{b}cc) & \vdash & (q_3, AAB\underline{B}CC) & \vdash \\
(q_2, AaBb\underline{c}c) & \vdash & (q_3, AA\underline{B}BCC) & \vdash \\
(q_3, AaB\underline{b}Cc) & \vdash & (q_3, A\underline{A}BBCC) & \vdash \\
(q_3, Aa\underline{B}bCc) & \vdash & (q_4, AA\underline{B}BCC) & \vdash \\
(q_3, A\underline{a}BbCc) & \vdash & (q_5, AAB\underline{B}CC) & \vdash \\
(q_3, \underline{A}aBbCc) & \vdash & (q_5, AABB\underline{C}C) & \vdash \\
(q_4, A\underline{a}BbCc) & \vdash & (q_5, AABBC\underline{C}) & \vdash \\
(q_1, AA\underline{B}bCc) & \vdash & (q_5, AABBCC\underline{\epsilon}) & \vdash \\
(q_1, AAB\underline{b}Cc) & \vdash & (q_{\text{yes}}, AABBC\underline{C}). &
\end{array}
$$

5.3 Turingin koneiden laajennuksia

Turingin koneista on olemassa monia erilaisia variaatioita. Tässä esitellään kuitenkin vain kolme variaatiota: moniuraiset koneet, joiden työnauha koostuu useasta rinnakkaisesta urasta, moninauhaiset koneet, joilla on useita toisistaan riippumattomia työnauhoja, sekä tärkeimpänä kaikista, epädeterministiset Turingin koneet. Huom! Mikä tahansa näistä variaatioista voidaan esittää standardimallisena Turingin koneena.

5.3.1 *Moniuraiset koneet



Kuva 5.6: Kolmeuraisen Turingin koneen nauha.

- Sallitaan, että Turingin koneen nauha koostuu k:sta rinnakkaisesta urasta, jotka kaikki kone lukee ja kirjoittaa yhdessä laskenta-askelessa.

- Koneen siirtymäfunktion arvot ovat tällöin muotoa:

$$\delta(q, (a_1, \ldots, a_k)) = (q', (b_1, \ldots, b_k), \Delta),$$

  missä $a_1, \ldots, a_k$ ovat urilta $1, \ldots, k$ luetut merkit, $b_1, \ldots, b_k$ niiden tilalle kirjoitettavat merkit, ja $\Delta \in \{L, R\}$ on nauhapään siirtosuunta.

- Laskennan aluksi tutkittava syöte sijoitetaan ykkösuran vasempaan laitaan; muille urille tulee sen kohdalle erityisiä tyhjämerkkejä $\#$.

- Formaalisti *k-urainen Turingin kone* on seitsikko

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}),$$

  missä muut komponentit ovat kuten standardimallissa, paitsi siirtymäfunktio:

$$\begin{aligned}\delta : (Q - \{q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}\}) \times (\Gamma^k \cup \{>, <\}) \rightarrow \\ Q \times (\Gamma^k \cup \{>, <\}) \times \{L, R\}.\end{aligned}$$

  (Seuraajatilannerelaation $\underset{M}{\vdash}$, alkutilan jne. määritelmät ovat pieniä muutoksia lukuunottamatta samanlaiset kuin standardimallissa.)

Lause: Jos formaali kieli L voidaan tunnistaa k-uraisella Turingin koneella, se voidaan tunnistaa myös standardimallisella Turingin koneella.

Todistus.

- Olkoon $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}})$ k-urainen Turingin kone, joka tunnistaa kielen L.

- Vastaava standardimallinen kone $\widehat{M}$ muodostetaan seuraavasti:

$$\widehat{M} = (\hat{Q}, \Sigma, \hat{\Gamma}, \hat{\delta}, \hat{q}_0, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}),$$

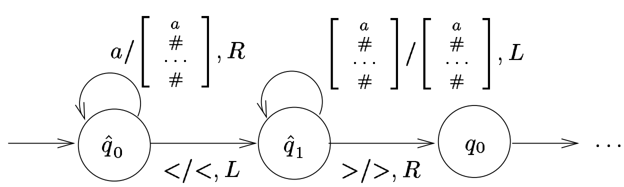
  missä $\hat{Q} = Q \cup \{\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2\}$, $\hat{\Gamma} = \Sigma \cup \Gamma^k$ ja kaikilla $q \in Q$ on

$$\hat{\delta}(q, \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}) = (q', \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}, \Delta),$$
$$\text{kun} \quad \delta(q, (a_1, \ldots, a_k)) = (q', (b_1, \ldots, b_k), \Delta).$$

- Koneen $\widehat{M}$ laskennan aluksi täytyy syötejono “nostaa” ykkösuralle, so. korvata nauhalla merkkijono $a_1 a_2 \ldots a_n$ merkkijonolla

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \# \\ \vdots \\ \# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ \# \\ \vdots \\ \# \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n \\ \# \\ \vdots \\ \# \end{bmatrix}.$$

- Tätä operaatiota varten liitetään M:stä kopioidun siirtymäfunktion osan alkuun vielä pieni “esiprosessori”.

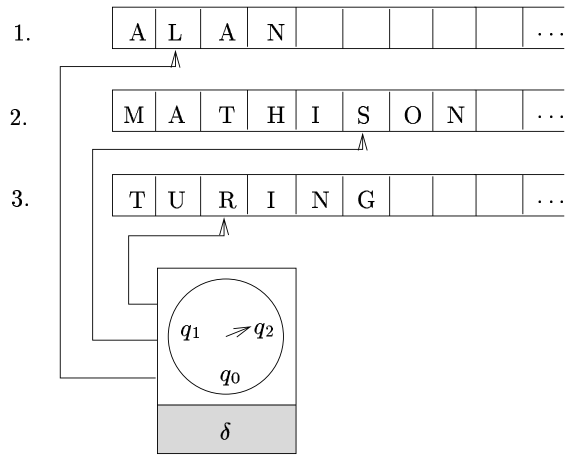


Kuva 5.7: Esiprosessori moniuraisen koneen sytteen nostamiseksi ykksuralle.

□

5.3.2 Moninauhaiset koneet

- Sallitaan, että Turingin koneella on k toisistaan riippumatonta nauhaa, joilla on kullakin oma nauhapäänsä.



Kuva 5.8: Kolmenauhainen Turingin kone.

- Kone lukee ja kirjoittaa kaikki nauhat yhdessä laskenta-askelessa.
- Laskennan aluksi syöte sijoitetaan ykkösnauhan vasempaan laitaan ja kaikki nauhapäät nauhojensa alkuun.
- Tällaisen koneen siirtymäfunktion arvot ovat muotoa

  $$\delta(q, a_1, \dots, a_k) = (q', (b_1, \Delta_1), \dots, (b_k, \Delta_k)),$$

  missä $a_1, \dots, a_k$ ovat nauhoilta $1, \dots, k$ luetut merkit, $b_1, \dots, b_k$ niiden tilalle kirjoitettavat merkit, ja $\Delta_1, \dots, \Delta_k \in \{L, R\}$ nauhapäiden siirtosuunnat.
- Formaalisti *k-nauhainen Turingin kone* on seitsikko

  $$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}),$$

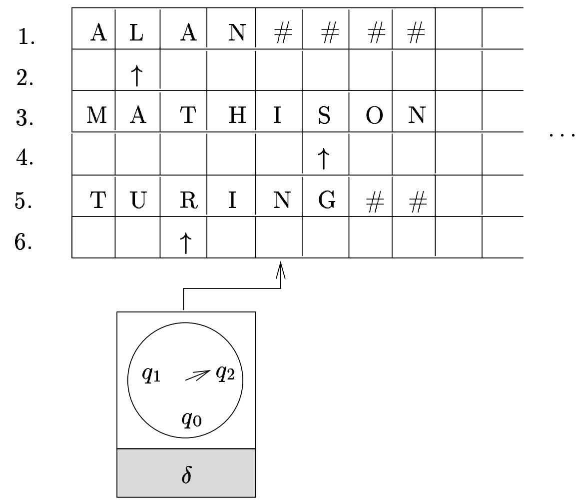
  missä muut komponentit ovat kuten standardimallissa, paitsi siirtymäfunktio:

  $$\begin{aligned} \delta : (Q - \{q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}\}) \times (\Gamma \cup \{>, <\})^k \to \\ Q \times ((\Gamma \cup \{>, <\}) \times \{L, R\})^k. \end{aligned}$$

  (Seuraajatilannerelaatio ym. peruskäsitteet määritellään pienin muutoksin entiseen tapaan.)

Lause: Jos formaali kieli L voidaan tunnistaa k-nauhaisella Turingin koneella, se voidaan tunnistaa myös standardimallisella Turingin koneella.

Todistus (idea).



Kuva 5.9: Kolmenauhaisen Turingin koneen simulointi kuusiuraisella.

- Olkoon $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathrm{yes}}, q_{\mathrm{no}})$ k-nauhainen Turingin kone, joka tunnistaa kielen L.

- Konetta M voidaan simuloida $2k$-uraisella koneella $\widehat{M}$ siten, että koneen $\widehat{M}$ parittomat urat $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ vastaavat M:n nauhoja $1, 2, \ldots, k$, ja kutakin paritonta uraa seuraavalla parillisella uralla on merkillä $\uparrow$ merkitty vastaavan nauhan nauhapään sijainti.

- Simuloinnin aluksi syötemerkkijono sijoitetaan normaalisti koneen $\widehat{M}$ ykkösuralle. Ensimmäisessä siirtymässään $\widehat{M}$ merkitsee nauhapääosoittimet $\uparrow$ parillisten urien ensimmäisiin merkkipaikkoihin.

- Tämän jälkeen $\widehat{M}$ toimii "pyyhkimällä" nauhaa edestakaisin sen alku- ja loppumerkin välillä.

  - Vasemmalta oikealle pyyhkäisyllä $\widehat{M}$ kerää tiedot kunkin osoittimen kohdalla olevasta M:n nauhamerkistä.
  - Kun kaikki merkit ovat selvillä, $\widehat{M}$ simuloi yhden M:n siirtymän.
  - Takaisin oikealta vasemmalle suuntautuvalla pyyhkäisyllä kone kirjoittaa $\uparrow$-osoittimien kohdalle asianmukaiset uudet merkit ja siirtää osoittimia.
    $\square$

5.3.3 Epädeterministiset koneet

Määritelmä: Epädeterministinen Turingin kone on seitsikko

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}),$$

missä muut komponentit ovat kuten deterministisessä standardimallissa, paitsi siirtymäfunktio:

$$\begin{aligned}\delta : (Q - \{q_{\text{yes}}, q_{\text{no}}\}) \times (\Gamma \cup \{>, <\}) \to \\ \mathcal{P}(Q \times (\Gamma \cup \{>, <\}) \times \{L, R\}).\end{aligned}$$

- Siirtymäfunktion arvon

  $$\delta(q, a) = \{(q_1, b_1, \Delta_1), \ldots, (q_k, b_k, \Delta_k)\}$$

  tulkinta on, että ollessaan tilassa q ja lukiessaan merkin a kone voi toimia jonkin kolmikon (q_i, b_i, Δ_i) mukaisesti.

- Epädeterministisen koneen tilanteet, tilannejohdot jne. määritellään formaalisti samoin kuin deterministisenkin koneen tapauksessa, paitsi että ehdon $\delta(q, a) = (q', b, \Delta)$ sijaan kirjoitetaan $(q', b, \Delta) \in \delta(q, a)$.

- Tämän muutoksen takia seuraajatilannerelaatio $\underset{M}{\vdash}$ ei ole enää yksiarvoinen: koneen tilanteella (q, w) voi nyt olla useita vaihtoehtoisia seuraajia, so. tilanteita (q', w'), joilla $(q, w) \underset{M}{\vdash} (q', w')$.

- Koneen M tunnistama kieli määritellään:

  $$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, \underline{x}) \underset{M}{\vdash}^* (q_{\text{yes}}, w) \text{ jollakin } w \in \Gamma^*\}.$$

- Epädeterministisen koneen M tapauksessa siis merkkijono x kuuluu M:n tunnistamaan kieleen, jos *jokin* M:n kelvollinen tilannejono johtaa alkutilanteesta syötteellä x hyväksyvään lopputilanteeseen.

Esimerkki: yhdistettyjen lukujen "tunnistaminen" epädeterministisillä Turingin koneilla.

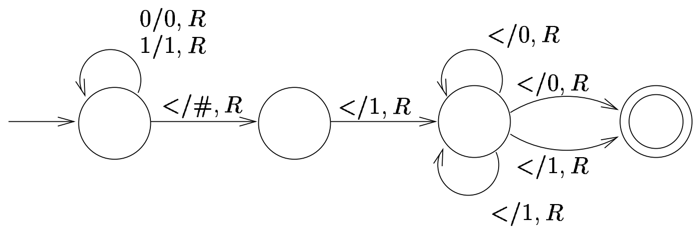
Ei-negatiivinen kokonaisluku n on *yhdistetty*, jos sillä on kokonaislukutekijät $p, q \geq 2$, joilla $pq = n$. Luku, joka ei ole yhdistetty, on *alkuluku*.

Oletetaan, että on jo suunniteltu deterministinen kone CHECK_MULT, joka tunnistaa kielen

$$L(\text{CHECK\_MULT}) = \{n\#p\#q \mid n, p, q \text{ binäärilukuja}, n = pq\}.$$

Olkoon lisäksi GO_START deterministinen Turingin kone, joka siirtää nauhapään osoittamaan nauhan ensimmäistä merkkiä.

Olkoon edelleen GEN_INT mielivaltaisen ykköstä suuremman binääriluvun nauhan loppuun tuottava epädeterministinen Turingin kone.

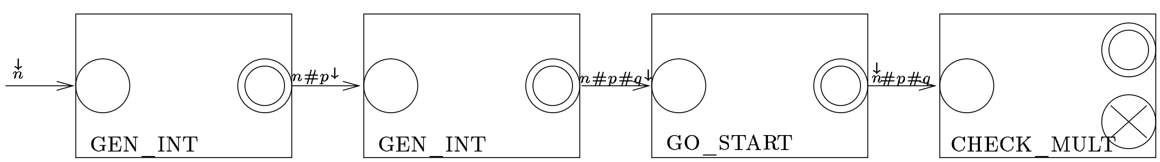


Kuva 5.10: Epädeterministinen Turingin kone GEN_INT.

Epädeterministinen Turingin kone TEST_COMPOSITE, joka tunnistaa kielen

$$L(\text{TEST\_COMPOSITE}) = \{n \mid n \text{ on binäärimuotoinen yhdistetty luku}\}$$

voidaan muodostaa näistä komponenteista yhdistämällä.



Kuva 5.11: Epädeterministinen Turingin kone TEST_COMPOSITE.

Yhdistetty kone hyväksyy syötteenä annetun binääriluvun n, jos ja vain jos on olemassa binääriluvut $p, q \geq 2$, joilla $n = pq$ — siis jos ja vain jos n on yhdistetty luku.

Deterministisen ja epädeterministisen Turingin koneen ekvivalenssi

Lause: Jos formaali kieli L voidaan tunnistaa epädeterministisellä Turingin koneella, se voidaan tunnistaa myös standardimallisella deterministisellä Turingin koneella.

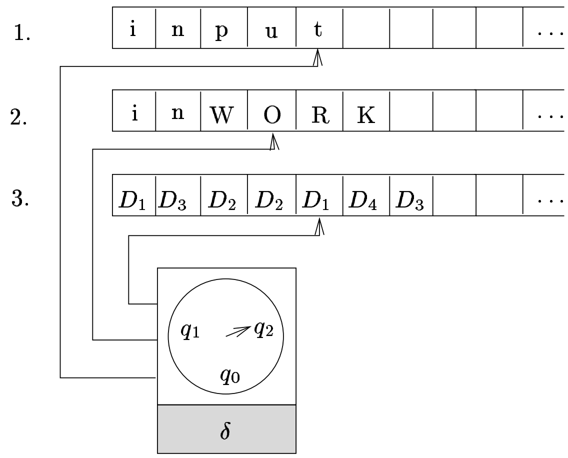
Todistus (idea).

- Olkoon $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}})$ epädeterministinen Turingin kone, joka tunnistaa kielen L.
- Konetta M voidaan simuloida kolmenauhaisella deterministisellä koneella $\widehat{M}$, joka käy systemaattisesti läpi M:n mahdollisia laskentoja (tilannejonoja), kunnes löytää hyväksyvän — jos sellainen on olemassa.
- Kone $\widehat{M}$ voidaan edelleen muuntaa standardimalliseksi edellisten lauseiden konstruktioilla.

Yksityiskohtaisemmin sanoen kone $\widehat{M}$ toimii seuraavasti:

- Nauhalla 1 $\widehat{M}$ säilyttää kopiota syötejonosta ja nauhalla 2 se simuloi koneen M työnauhaa. Kunkin simuloitavan laskennan aluksi $\widehat{M}$ kopioi syötteen nauhalta 1 nauhalle 2 ja pyyhkii pois nauhalle 2 edellisen laskennan jäljiltä mahdollisesti jääneet merkit.
- Nauhalla 3 $\widehat{M}$ pitää kirjaa vuorossa olevan laskennan "järjestysnumerosta". Tarkemmin sanoen, olkoon r suurin M:n siirtymäfunktion arvojoukon koko. Tällöin $\widehat{M}$:lla on erityiset nauhamerkit $D_1, \ldots, D_r$, joista koostuvia jonoja se generoi nauhalle 3 kanonisessa järjestyksessä (λ, D_1, D_2, $\ldots$, D_r, D_1D_1, D_1D_2, $\ldots$, D_1D_r, D_2D_1, $\ldots$).
- Kutakin generoitua jonoa kohden $\widehat{M}$ simuloi yhden M:n osittaisen laskennan, jossa epädeterministiset valinnat tehdään kolmosnauhan koodijonon ilmaisemalla tavalla.
- Esimerkiksi jos kolmosnauhalla on jono $D_1D_3D_2$, niin ensimmäisessä siirtymässä valitaan vaihtoehto 1, toisessa vaihtoehto 3, kolmannessa vaihtoehto 2. Ellei tämä laskenta johtanut M:n hyväksyvään lopputilaan, generoidaan seuraava koodijono $D_1D_3D_3$ ja aloitetaan alusta.
- Jos koodijono on epäkelpo, so. jos siinä jossakin kohden on tilanteeseen liian suuri koodi, simuloitu laskenta keskeytetään ja generoidaan seuraava jono.

- Selvästi tämä systemaattinen koneen M laskentojen läpikäynti johtaa koneen $\widehat{M}$ hyväksymään syötejonon, jos ja vain jos koneella M on syötteen hyväksyvä laskenta. Jos hyväksyvää laskentaa ei ole, kone $\widehat{M}$ ei pysähdy. $\square$



Kuva 5.12: Epädeterministisen Turingin koneen simulointi deterministisellä