

## Harjoitus 5

1. Mihin käytännön sovelluksiin sinä voisit käyttää äärellisiä automaatteja tai säännöllisiä lausekkeita? Mainitse ainakin kolme sovellusta!

2. Ovatko seuraavat kielet säännöllisiä? Perustele huolella!

(a)  $\{w|w \text{ on } a\text{:sta ja } b\text{:stä koostuva merkkijono, jonka pituus on } 3\}$

(b)  $\{ww^*|w \in \{a, b\}^*\}$

(c)  $\{w^*|w\text{:ssä yhtä monta } 1\text{:ä ja } 0\text{:aa}\}$

(d)  $\{w|w\text{:ssä kaksi kertaa niin monta } 0\text{:aa kuin } 1\text{:ä}\}$

3. Mitä tapahtuu, jos yrität todistaa Pumpauslemmalla epäsäännölliseksi kielen, joka onkin oikeasti säännöllinen? Tarkastele esimerkiksi kieliä  $L_1 = \emptyset$ ,  $L_2 = \{aa, bb\}$ ,  $L_3 = \{ab^*a^*b\}$ .

4. Mitä vikaa on seuraavissa Pumpauslemmatodistuksissa?

a) Olkoon  $L = \{(aa)^i(bb)^j | i, j \geq 0\}$ .

Väite:  $L$  on epäsäännöllinen.

Todistus: Olkoon  $x = (aa)^n(bb)^n = a^{2n}b^{2n}$ ,  $|x| = 4n$ . Nyt  $x$  voidaan jakaa osiin  $uvw$  vain yhdellä tavalla:  $u = a^i$ ,  $v = a^j$ ,  $j \geq 1$ ,  $w = a^{2n-i-j}b^{2n}$ . Nyt  $uv^0w = a^{2n-j}b^{2n} \notin L$ , joten  $L$  on epäsäännöllinen.

b) Olkoon  $L = \{c^r a^k b^k | r \geq 1, k \geq 0\} \cup \{a^k b^l | k, l \geq 0\}$ .

Väite:  $L$  on säännöllinen.

Todistus:  $L = L_1 \cup L_2$ , missä  $L_1 = \{c^r a^k b^k | r \geq 1, k \geq 0\}$  ja  $L_2 = \{a^k b^l | k, l \geq 0\}$ . Jokaiselle  $x \in L$  pätee  $x \in L_1$  tai  $x \in L_2$ . Tutkitaan erikseen kumpaakin tapausta:

1) Jos  $x \in L_1$ , valitaan  $x = c^n a^k b^k$ .  $|x| = n + 2k > n$ .  $x$  voidaan jakaa osiin  $uvw$  vain yhdellä tavalla:

$u = c^i$ ,  $v = c^j$ ,  $j \geq 1$ ,  $w = c^{n-i-j} a^k b^k$ . Nyt  $uv^k w \in L$  kaikilla  $k = 0, 1, 2, \dots$ , eli voimme aina pumpata  $x$ :ää.

2) Jos  $x \in L_2$ , valitaan  $x = a^n b^l$ ,  $|x| = n + l$ .  $x$  voidaan jakaa osiin vain yhdellä tavalla:  $u = a^i$ ,  $v = a^j$ ,  $j \geq 1$ ,  $w = a^{n-i-j} b^l$ .  $uv^k w \in L$  kaikilla  $k = 0, 1, 2, \dots$

$\Rightarrow L$  on säännöllinen.

5. Osoita Pumpauslemmalla, että seuraavat kielet eivät ole säännöllisiä, ja muodosta kielen kuvaava kontekstiton kielioppi:

(a)  $\{a^n b^n c^k \mid n, k = 0, 1, \dots\}$

(b)  $\{a^n b^k c^k \mid n, k = 0, 1, \dots\}$

(c)  $\{a^n b^n a^m b^m \mid n, k = 0, 1, \dots\}$

6. Merkitään  $w^R$ :llä merkkijonoa  $w$  takaperin kirjoitettuna (so. jos  $w = a_1 a_2 \dots a_n$ , niin  $w^R = a_n \dots a_2 a_1$ ). Merkkijono on palindromi, jos  $w = w^R$  (esimerkiksi "isorikassikakissakiroso"). Tarkastellaan aakkoston  $\{a, b\}$  palindromien muodostamaa kieltä  $L_{pal} = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Osoita Pumpauslemmalla, että palindromikieli  $L_{pal}$  on epäsäännöllinen!

7. Olkoon kontekstiton kielioppi  $G = (V, \Sigma, P, S)$ , missä  $V = \{A, B, C, D, S\} \cup \Sigma$ ,  $\Sigma = \{Jim, big, green, cheese, ate\}$  ja säännöt  $P$  ovat:

$$A \rightarrow B|CA$$

$$S \rightarrow ADA$$

$$C \rightarrow big|green$$

$$B \rightarrow cheese|Jim$$

$$D \rightarrow ate$$

Millaisia merkkijonoja kuuluu kieliopin  $G$  kuvaamaan kieleen kuuluu? Anna joitain esimerkkejä! Kuuluvatko seuraavat lauseet kieleen  $L(G)$ : "big big green cheese", "ate Jim big cheese"?

8. (a) Anna äärellinen automaatti, joka tunnistaa seuraavan kieliopin kuvaaman kielen. Mikä on vastaava säännöllinen lauseke?

$$S \rightarrow aA|bB$$

$$A \rightarrow aS|bA$$

$$B \rightarrow bB|\epsilon$$

(b) Laadi oikealle lineaarinen kielioppi kielen  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ei sisällä merkkijonoa } abaa\}$  kuvaamiseen.

9. Ulkoavaruuden olioiden kielessä kaikki sanat noudattavat Blurbsin muotoa. Blurb on Whoozit, jota seuraa yksi tai useampi Whatzit. Whoozit on kirjain

'x', jota voi seurata haluttu määrä 'y'-kirjaimia (myös nolla (0) kappaletta). Whatzit on kirjain 'q', jota seuraa joko kirjain 'z' tai 'd', jota seuraa Whoozit. Anna Blurbsin kielen kuvaava kontekstiton kielioppi. Osaatko nyt laatia vastaavan säännöllisen lausekkeen? (Vihje: piirrä ensin automaatti kieliopista!)

10. Säännöllisille lausekkeille pätee seuraava päättelysääntö:

Jos  $r = rs \cup t$ , niin  $r = ts^*$ , kun  $\epsilon \notin L(s)$ .

Osoita tämä sääntö todeksi kontekstittomien kielioppien avulla!

**Haasteellisempia:**

11. Tiedetään, että yleisessä tapauksessa ongelma  $REG(L)$  (ts. onko annettu kieli  $L$  säännöllinen vai ei) on ratkeamaton. Mistä tämä johtuu? Voisitko silti laatia ohjelman, joka auttaisi ihmistä osoittamaan Pumppauslemmalla, että kieli on epäsäännöllinen?

12. Vahvempi Pumppauslemman variaatio antaa sekä riittävät että välttämättömät ehdot kielen säännöllisyydelle:

**Pumppauslemma 2:** Kieli  $A \in \Sigma^*$  on säännöllinen, jos ja vain jos on olemassa vakio  $n \geq 1$  s.e. kaikilla  $x \in \Sigma^*$ , jos  $|x| \geq n$  on olemassa  $u, v, w$  s.e.  $x = uvw$  ja  $|v| \geq 1$  ja kaikilla  $i \geq 0$  ja kaikilla  $y \in \Sigma^*$   $xy \in A$  jos ja vain jos  $uv^iwy \in A$ .

Voiko tämän pohjalta laatia ohjelman, joka ratkaisee minkä tahansa kielen  $A$  osalta, onko  $A$  säännöllinen vai ei?