Harjoitus 9

1. Anna rajoittamaton (tai kontekstillinen) kielioppi, joka generoi kielen $L = \{a^i b^{2i} a^i | i > 0\}$. Anna merkkijonon $aabbbbaa$ johto kyseisessä kieliopissa!

2. Chomsky uskoi, että luonnollinen kieli voidaan kuvata kontekstillisella kieliopilla, jonka kaikki produktiot voidaan esittää muodossa:

   $S \to \epsilon$ or $\alpha A \beta \to \alpha \omega \beta$,

   missä A on välikesymboli ja $\omega \neq \epsilon$. Anna esimerkki jostain kielen (syntaktisesta) rakenteesta, joka edellyttää tällaista ”kontekstia” α_β! Uskotko, että kaikki luonnollisen kielen rakenteet voidaan kuvata kontekstillisella kieliopilla?

3. Universaali Turingin kone on kutsunut kaikki maailmankaikkeuden Turingin koneet Universumin laajuisen Turing-symposiumiin, joka pidetään Hilbertin hotellissa. Turingin koneiden huonevaraukset on tehty koneiden koodeilla c_M. Riittääkö jokaiselle koneelle oma huone, jos hotellissa ei ole muita vieraita? Miten jaat huoneet?

4. Piirrä seuraavan koodin kuvaama Turingin kone!

   1110101001010011010010100100110100001000010000101100101010100 11
   0010010010010011001000010001000010111.

5. Mitkä ovat seuraavien Turingin koneiden koodit?

   (a) $\delta(q_0, 0) = (q_0, 0, R)$
   $\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R)$
   $\delta(q_0, <) = (q_{yes}, <, L)$

   (b) $\delta(q_0, 0) = (q_1, 0, R)$
   $\delta(q_0, 1) = (q_{no}, 1, R)$
   $\delta(q_0, <) = (q_{no}, <, L)$
   $\delta(q_1, 0) = (q_{yes}, 0, R)$
   $\delta(q_1, 1) = (q_0, 1, R)$
   $\delta(q_1, <) = (q_{yes}, <, L)$

6. Simuloi universaalikoneen toimintaa, kun se saa syötteenään $c_M w$ edellisen tehtävän b-kohdan koneen ja merkkijonon 0101!

7. Laadi äärellinen automaatti joka tunnistaa lailliset Turingin koneiden koodit. Mikä on vastaava säännöllinen lauseke?

8. Laadi standardimallinen Turingin kone, joka tunnistaa lailliset Turingin koneiden koodit.

9. Olkoon kielet A ja B rekursiivisesti lueteltavia. (Ts. on olemassa Turingin koneet M_A ja M_B, jotka tunnistavat kyseiset kielet ja pysähtyvät "Kyllä"-tapauksissa, mutta eivät välttämättä "Ei"-tapauksissa.) Osoita, että kielet $A \cup B$ ja $A \cap B$ ovat myös rekursiivisesti lueteltavia ts. voit muodostaa niille Turingin koneet, jotka pysähtyvät ainakin "Kyllä"-tapauksissa kaikilla syötteillä!

10. Olkoon A rekursiivisesti numeroituva kieli. Voitko muodostaa sen komplementtikielelle $\overline{A}$ tunnistuskoneen koneesta M_A vaihtamalla hyväksyvän ja hylkäävän lopputilan keskenään?

11. Osoita, että kieli $\{c_M | M$ pysähtyy syötteellä $\epsilon\}$ on rekursiivisesti numeroituva, mutta ei rekursiivinen! Ts. keksi sille tunnistuskone, joka pysähtyy "Kyllä"-tapauksissa, mutta ei välttämättä pysähdy "Ei"-tapauksissa.

12. Anna esimerkki Turngin koneesta, joka

    a) hyväksyy oman koodinsa.
    b) ei hyväksy omaa kodiaan.

13. Osoita, että seuraavat rekursiivisesti numeroituvien kielten semanttiset ominaisuudet eivät ole triviaaleja.

    a) L sisältää merkkijonon w.
    b) L on äärellinen.
    c) L on säännöllinen.
    d) L on $\{0, 1\}^*$.

14. Keksi kaksi esimerkkiä triviaaleista ominaisuuksista: yksi, joka ei päde millekään rekursiivisesti numeroituvalle kielelle ja toinen, joka pätee kaikille!

15. Mitkä seuraavista Turingin koneiden ominaisuuksista ovat ratkeavia? (Vihje: keksi ratkaisualgoritmin idea tai pohdi, onko ominaisuus semanttinen.)

    a) M pysähtyy kaikilla parillisilla binääriluvuilla.
    b) Kun M käynnistetään tyhjällä syötteellä, se saavuttaa tilan q korkeintaan

10 askeleella, tai jos se käynnistetään syötteellä a, se saavuttaa tilan p korkeintaan 20 askeleella.
c) M:ssä ei ole yhtään siirtymää tilaan q, jossa samalla kirjoitettaisiin lopetusmerkki $<$.
d) Tila q voidaan saavuttaa tilasta p korkeintaan 3:lla askeleella.
e) M:ssä on alle 100 tilaa ja M pysähtyy syötteellä 0.

16. Osoita, että seuraava ongelma on ratkeamaton: Annettu Turingin koneen koodi c_M, tila q ja syöte w. Päätyykö M syötteellä w tilaan q?

17. Ovatko seuraavat kielet rekursiivisia, rekursiivisesti numeroituvia vai täysin ratkeamattomia?

    a) $L_1 = \{c_M | \text{Koneen } M \text{ koodi } c_M \text{ on palindromi}\}$.
    b) $L_2 = \{c_M | c_M \text{on koneen } M \text{ koodi ja kone } M \text{tunnistaa kaikki aakkoston } \{0,1\} \text{ palindromit}\}$.

    (Palindromin määritelmä: Merk. $w = a_0a_1...a_n$, jos $a_0a_1...a_n = a_na_{n-1}...a_0$, niin w on palindromi.)