Laskennanvaativuusteorian projektityö (1 ov)

Turingin koneiden aika- vs. tilavaativuus, vaativuusluokat, NP-täydellisyys

Projektityö on suora jatko TEPE-kurssille ja sen voi suorittaa samaan tapaan ryhmissä ongelmia pohtien kuten kurssillakin. Palauta kuitenkin itsenäisen opiskelusi tulos ongelmaraporttina! Ongelmien lisäksi projektiin kuuluu 10 harjoitustehtävää (kotidemot) ja oppimispäiväkirja. Ongelmista saa 50% pisteistä ja harjoituksista ja oppimispäiväkirjasta kummastakin 25% pisteistä. Jos juutut pahoihin vaikeuksiin, tule kysymään apua!

Viimeinen palautuspäivä **pe 21.5. päivään mennessä**

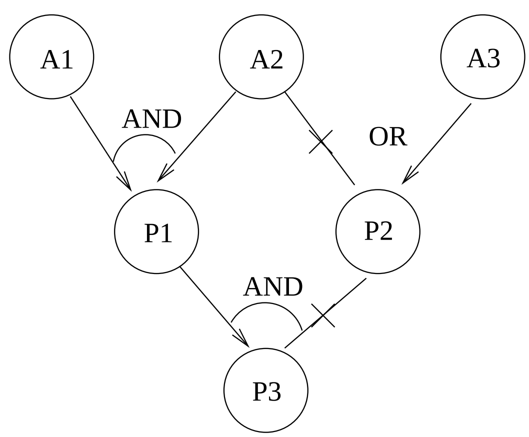
Valitse kolme seuraavista ongelmista!

Tapaus 1

Tarkastellaan seuraavanlaisia uskomusverkkoja: Järjestelmässä on annettuna joukko aksioomia $A_1, A_2, ..., A_n$ (juurisolmut) sekä uskomuksia $P_1, P_2, ..., P_k$ (muut solmut) . Kukin aksiooma voi olla joko tosi tai epätosi, samoin kukin uskomus. Uskomusten totuusarvot saadaan aksioomien tai aiemmin johdettujen uskomusten totuusarvoista AND-, OR- ja NOT-operaatioilla. Esimerkiksi säännöt

$A_1 \ AND \ A_2 \rightarrow P_1$
$NOT A_2 \ OR \ A_3 \rightarrow P_2$
$P_1 \ AND \ NOT P_2 \rightarrow P_3$

voidaan kuvata verkkona



Järjestelmällä voidaan suorittaa kahdenlaista päättelyä. Ensinnäkin voidaan kysyä, onko annettu uskomus P tosi vai epätosi annetulla aksioomajoukolla.

Toiseksi voidaan kysyä, millä aksioomajoukoilla annettu uskomus P olisi tosi. Mitkä ovat kummankin päättelytyypin aikavaativuusluokat (pahimmassa tapauksessa)? Jos samalla verkolla tehdään useita kyselyjä (eri uskomuksista), miten päättely kannattaisi toteuttaa mahdollisimman tehokkaasti? (Vihje: Voisiko ajan muuttaa tilaksi?)

Tapaus 2

Maija ja Matti leikkivät erikorkuisilla palikoilla. Kumpikin rakentelee omia tornejaan, mutta sitten lapsille tulee riita: onko palikat jaettu reilusti? Pystyykö kumpikin rakentamaan yhtä korkean tornin?

Auta lapsia ja suunnittele epädeterministinen Turingin kone joka ratkaisee lasten ns. PRT-ongelman (partitioning problem) mahdollisimman tehokkaasti: Annettu n positiivista kokonaislukua $x_1, x_2, ..., x_n$. Voiko luvut (palikat) jakaa kahteen joukkoon siten, että kummankin joukon summa on sama? Ts. onko olemassa ositus kahteen indeksijoukkoon I ja J s.e. $\Sigma_{i \in I} x_i = \Sigma_{j \in J} x_j$? (Huom! Koneen riittää siis vastata vain ”kyllä” tai ”ei”.) Koneen komponenttien sanallinen kuvaus riittää, sinun ei tarvitse laatia yksityiskohtaista siirtymäkaaviota, kunhan koneen toiminta selviää kuvauksesta.

Mihin aikavaativuusluokkaan ongelma kuuluu?

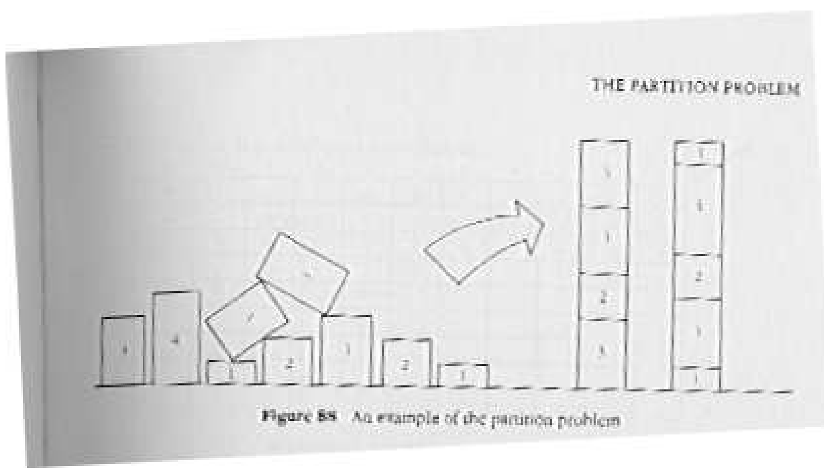


Figure 58 An example of the partition problem

Tapaus 3

Haluaisit ottaa matkalle mukaan paljon kirjoja, mutta lentokoneessa on absoluuttinen 30 kilon painoraja matkatavaroille. Päätät jättää kaiken muun paitsi kirjat kotiin, mutta silti sinulla on liian paljon kirjoja ja sinun pitäisi karsia pois osa niistä. Niinpä päätät optimoida mukaan otettavien kirjojen tärkeys-paino-suhdetta. Määrittelet jokaiselle kirjalle tärkeysmitan s_i ja punnitset sen painon w_i. Miten valitset optimaalisen kirjakokoelman mukaasi? Ts. sinun pitäisi valita kirjajoukosta $1, 2, ..., N$ osajoukko I s.e. $\Sigma_{i \in I} w_i \leq 30$ ja $\Sigma_{i \in I} s_i$ on mahdollisimman suuri.

Kuinka vaativa ongelma on?

Tapaus 4

Ulkoavaruudesta saapuu alien-retkikunta, joka lahjoittaa Maan asukkaille hyvän tahdon eleenä algoritmin, joka ratkaisee SAT-ongelman polynomisessa ajassa $q(n)$. Miten voit käyttää lahjaa hyväksesi?

Tarkastele erityisesti NP-täydellistä ongelmaa CAT[1], jonka voi ratkaista epädeterministisellä Turingin koneella polynomisessa ajassa $p(n)$. CAT-ongelman koodaus SAT:ina (ts. loogisina lausekkeina, jotka kuvaavat CAT-koneen toiminnan) vaatii ajan $(p(n))^3$. Missä ajassa voit ratkaista CAT:in? Entä muut NP-täydelliset ongelmat?

Harjoitustehtäviä

1. Kahdeksan kilpailijaa on osallistunut ohjelmointikilpailuun, jossa täytyi ratkaista salaperäinen MYST-ongelma mahdollisimman tehokkaasti. Pistä kilpailijat paremmuusjärjestykseen niiden aikavaativuusluokkien (O-luokat) perusteella! Ohjelmien aikavaativuudet ovat seuraavat:

   $n \log n$
   n^8
   $n^{1+\epsilon}$
   $(1+\epsilon)^n$
   $(n^2 + 8n + \log^3 n)^4$
   $\frac{n^2}{\log n}$
   $(1-\epsilon)^n$
   1

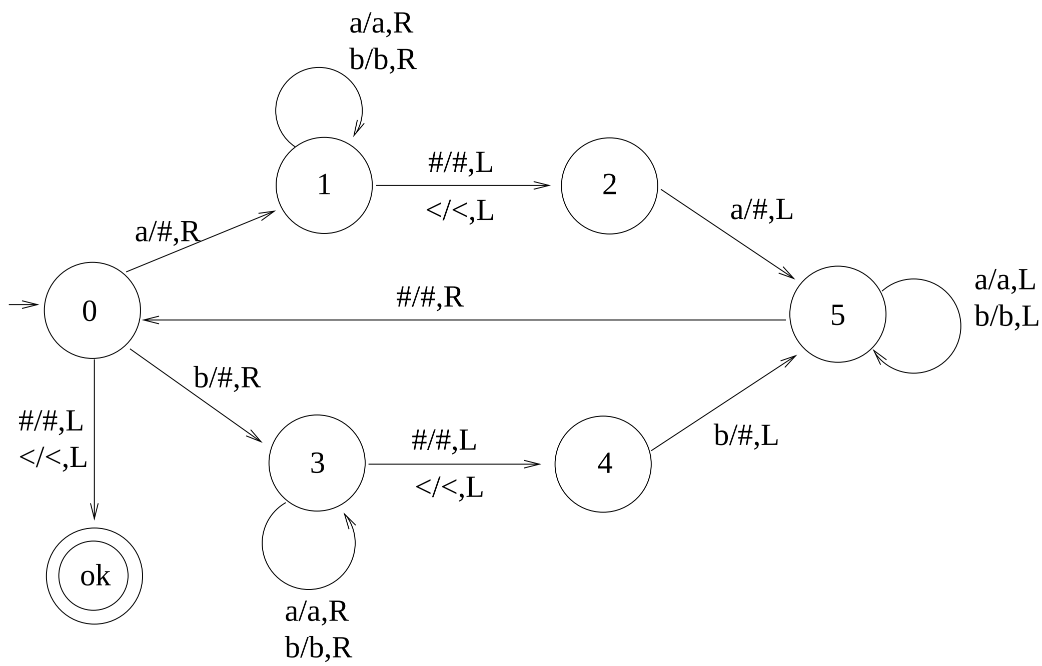
   missä ϵ on vakio $0 < \epsilon < 1$.

2. Laadi kielen $L = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ tunnistava pinoautomaatti sekä Turingin kone. Mitkä ovat koneiden aika- ja tilavaativuudet? Ovatko ne keskenään vertailukelpoisia?

[1] Huom! CAT on kuvitteellinen ongelma, jota ei vielä tunneta.

3. Määritä seuraavan, kielen $\{ww^R | w \in \{a, b\}^*\}$ tunnistavan standardimallisen Turingin koneen aikavaativuus pahimmassa tapauksessa syötteen pituuden n funktiona.

   (Ohje: Pahimmat tapaukset koneen aikavaativuuden kannalta ovat sellaiset syötteet, jotka kuuluvat tunnistettavaan kieleen. Tarkastele, montako edestakaista ”pyyhkäisyä” nauhallaan kone tarvitsee tämänmuotoisen syötteen käsittelyyn, ja montako siirtoa kuhunkin pyyhkäisyyn kuuluu.)



4. (a) Osoita, että kaikki säännölliset kielet kuuluvat luokkaan $DTIME(n + 1)$

   (b) Osoita, että kaikki kontekstittomat kielet kuuluvat luokkaan P. (Vihje: Miten tehokkaita jäsennysmenetelmiä tunnet?)

5. Olkoon C mikä tahansa kieliluokka (erityisesti kiinnostavia ovat luokat $C = NP$, $PSPACE$, jne.). Sanotaan, että kieli A on C-täydellinen, jos A kuuluu luokkaan C ja mikä tahansa kieli $B \in C$ voidaan polynomisesti palauttaa A:ksi. (Merk. $B \leq_m{}^p A$.) Miksi vaadimme, että palautusfunktion aikavaatimus on polynominen? Miksei esim. riitä, että sen tilavaatimus olisi polynominen?

6. Todista seuraavat väitteet:
   a) Jos A on NP-täydellinen kieli ja $A \in P$, niin $P = NP$.

b) Jos A on NP-täydellinen kieli, $B \in NP$ ja $A \leq_m{}^p B$, niin myös B on NP-täydellinen.

(Vihje: Polynomisten palautusten ominaisuudet.)

7. Tiedämme, että epädeterministinen Turingin kone voidaan aina muuntaa deterministiseksi. Miksei tämä riitä osoittamaan, että $P = NP$?

8. Osoita, että luokka NP on suljettu yhdisteiden ja leikkausten suhteen! (Vihje: Oleta, että meillä on epädeterministiset Turingin koneet M_A ja M_B, jotka tunnistavat kielet A ja B polynomisessa ajassa ja muodosta vastaavat yhdiste- ja leikkauskoneet.) Luokan ei tiedetä olevan suljetun komplementoinnin suhteen. Mihin vaikeuteen törmätään yritettäessä todistaa tämä ominaisuus?

9. Olet matkusteleva matemaatikko Paul Erdös, joka antaa luentoja ympäri maailmaa. Haluaisit suunnitella lyhimmän mahdollisen reitin kaikkien yliopistojen kautta, vierailematta kuitenkaan useampaan kertaan samassa kaupungissa. Sinulla on hyvin tehokas algoritmi, joka ratkaisee Hamiltonin kehä (HC) ongelman. Voitko hyödyntää algoritmiasi reitin suunnittelussa? Perustele!

   (Vihje: Polynomiset palautukset. Täydennä HC-verkkoon siitä puuttuvat kaaret, mutta anna niille niin suuret painot, ettei matemaatikon reitti voi kulkea niiden kautta.)

10. Mikä on suosikkisi NP-täydellisistä ongelmista? Missä käytännön tilanteissa voit törmätä siihen?